کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ (فنی-۱۲ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/**دوم**) **۸۹-۱۳۸۸** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۸۹/۳/۲۹** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- نزدیکترین نقطه از منحنی اشتراک رویه های $xyz = a^{۳}$ و $y = x$ ، به مبدا مختصات را بیابید. ($a > ۰$) **۲۰ نمره**

سوال۲- مطلوب است مقدار انتگرال **۱۵ نمره**

$$\int_C (y\cos x + z - ۳۵۲)dx + (\sin x + ۴۶۳)dy + (x + ۵۷۴)dz$$

C : قسمتی از منحنی $r(t) = (\cos t, \sin t, \frac{۲t}{\pi})$ است از نقطه $(۱,۰,۰)$ تا نقطه $(۰,۱,۱)$.

سوال۳- با تغییر متغیر مناسب، انتگرال دوگانه مقابل را حل کنید : **۱۵ نمره**

$$\int_{x=۰}^{۱} \int_{y=۰}^{۱-x} e^{\frac{y}{x+y}} dydx$$

سوال۴- مساحت قسمتی از سطح کره $x^{۲} + y^{۲} + (z-۵)^{۲} = ۲۵$ را محاسبه کنید که درون سهمیگون $z = x^{۲} + y^{۲}$ قرار دارد. **۲۰ نمره**

سوال۵- اگر مسیر C قسمتی از منحنی $r = ۱ - \cos\theta$ باشد که در ناحیه اول قرار دارد و مبدا مختصات را به نقطه $(۰,۱)$ وصل می کند. انتگرال $\int_C -ydx + xdy$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- حجم ناحیه‌ای را حساب کنید که بالای صفحه $z = ۰$ ، داخل کره $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲$ و خارج از مخروط $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}$ قرار دارد. **۲۰ نمره**

سوال۷- اگر S سطح خارجی ناحیه $V = \{(x,y,z) \mid z \geq ۰ ,\ x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leq a^{۲}\}$ باشد، درستی قضیه دیورژانس (واگرایی) را در مورد میدان برداری زیر تحقیق کنید. **۲۰ نمره**

$$F = (x-z)i + (y+z)j + (x-y)k$$

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس ریاضی۲ (فنی) - ۱۳۸۹/۳/۲۹

سوال ۱- تابع هدف اصلی عبارت است از $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ که فاصله نقطه (x,y,z) از مبدا مختصات است اما می توانیم به جای آن از تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ استفاده کنیم. در ضمن چون $a>0$ داریم $xyz\neq 0$.

روش اول : با توجه به دو شرط مساله می توانیم f را به یک تابع یک متغیره تبدیل کنیم زیرا $y=x$ و $z=a^3/x^2$ و در نتیجه $f(x,y,z)=g(x)=2x^2+a^6/x^4$ در این صورت $g'(x)=4x-4a^6/x^5$ و اگر $g'(x)=0$ خواهیم داشت $x=a$.
یعنی نقطه مورد نظر نقطه (a,a,a) می‌باشد.

روش دوم : با توجه به شرط $y=x$ می توانیم تابع f را به یک تابع دو متغیره همراه با یک شرط تبدیل کنیم : $g(x,z)=2x^2+z^2$ با شرط $x^2z-a^3=0$ اکنون به کمک ضرایب لاگرانژ تابع $\varphi(x,z,\lambda)=2x^2+z^2-\lambda(x^2z-a^3)$ را در نظر می گیریم و باید داشته باشیم :

$$\varphi_x=4x-2\lambda xz=0\ ,\ \varphi_z=2z-\lambda x^2=0\ ,\ \varphi_\lambda=-x^2z+a^3=0$$

یعنی $2z=\lambda x^2$, $2=\lambda z$ و از تقسیم طرفین این تساویها نتیجه می شود $x=z$ و در نهایت داریم $x=y=z=a$.

روش سوم : بدون هیچ تغییری در ظاهر مساله از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.
تابع $\varphi(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2z-a^3)-\mu(y-x)$ را در نظر می گیریم و باید داشته باشیم :

$$\varphi_x=2x-\lambda yz+\mu=0,\ \varphi_y=2y-\lambda xz-\mu=0\ ,\ \varphi_z=2z-\lambda xy=0\ ,\ \varphi_\lambda=-xyz+a^3=0,\ \varphi_\mu=-y+x=0$$

از معادله آخر داریم $y=x$ اکنون اگر طرفین دو معادله اول را از هم کم کنیم نتیجه می شود $\mu=0$ و اگر آنها را با هم جمع کنیم داریم $(4x-2\lambda xz)=0$ یعنی $\lambda z=2$. از معادله سوم نتیجه می‌شود $\lambda z^2-\lambda xy=0$ یعنی $z^2=xy$ و از معادله چهارم داریم $z^3=a^3$ و در نهایت خواهیم داشت $z=a$ و $x=y=a$.

سوال۲- روش اول : اگر انتگرال را به صورت بنویسیم $\int_C F\cdot dr$ آنگاه $F=(y\cos x+z-352,\sin x+463,x+574)$ و این تابع بردار گرادیان تابع $f(x,y,z)=y\sin x+xz-352x+463y+574z$ است و بنابر این :

$$\int_C F\cdot dr=f(0,1,1)-f(1,0,0)=463+574-(-352)=1389$$

روش دوم : حل مستقیم انتگرال (راه حل از وحید توکلی امیرآبادی – رشته برق)

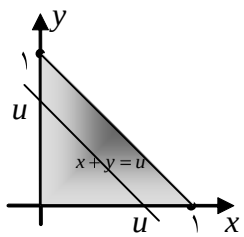
$$\int_C (y\cos x+z-352)dx+(\sin x+463)dy+(x+574)dz=$$

$$=\int_{t=0}^{\pi/2}[(\sin t\cos\cos t+\frac{2t}{\pi}-352)(-\sin t)+(\sin\cos x+462)\cos t+(\cos t+574)\frac{2}{\pi}]dt$$

$$=\int_{t=0}^{\pi/2}[(-\sin^2 t\cos\cos t+\cos t\sin\cos x)+\frac{2}{\pi}(-t\sin t+\cos t)+(352\sin t+462\cos t)+574\times\frac{2}{\pi}]dt$$

$$=[\sin t\sin\cos t+\frac{2}{\pi}t\cos t-352\cos t+463\sin t+574\times\frac{2}{\pi}t]_{t=0}^{\pi/2}=463+574-(-352)=1389$$

سوال۳- ناحیه انتگرالگیری عبارت است از ناحیه مثلثی با راسهای $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0,1)$



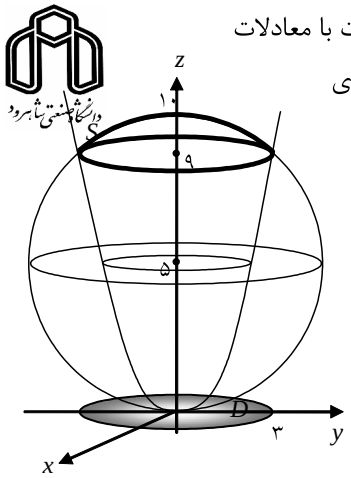
روش اول : با تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=\frac{y}{x+y}$ خواهیم داشت $y=uv$ و $x=u-uv$ و در نتیجه $dxdy=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}dudv=ududv$. با توجه به شکل $0\le u\le 1$ و $0\le v\le 1$ و بالاخره

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dydx=\int_{v=0}^{1}\int_{u=0}^{1}ue^v dudv=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{1}e^v dv=\frac{1}{2}(e-1)$$

روش دوم : با تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=y$ خواهیم داشت $y=v$ و $x=u-v$ و در نتیجه $dxdy=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}dudv=dudv$.

با توجه به شکل، $0\le u\le 1$ و $0\le v\le u$ و بالاخره $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dydx=\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{u}e^{\frac{v}{u}}dvdu=\int_{u=0}^{1}ue^{\frac{v}{u}}|_{v=0}^{u}du=(e-1)\int_{u=0}^{1}udu=\frac{1}{2}(e-1)$

سوال۴- با حل یک دستگاه دو معادله و سه مجهول، اشتراک دو رویه (غیر از مبدا مختصات) دایره ای است با معادلات $z=۹\,,\ x^۲+y^۲=۹$. تصویر سطح مورد نظر- که آن را S می‌نامیم - بر روی صفحه $z=۰$ قرص دایره ای $x^۲+y^۲\le ۹$ خواهد بود و آن را D می‌نامیم. بردار یکه قائم بر سطح S با بردار گرادیان سطح کره یعنی $(۲x,۲y,۲(z-۵))$ موازی است بنابر این $\vec{n}=\frac{۱}{۵}(x,y,z-۵)$ اکنون می توانیم مساحت سطح S را محاسبه کنیم.

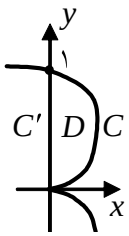


$$\iint_S dS=\iint_S\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\iint_S\frac{۵\ dxdy}{z-۵}=\iint_D\frac{۵\ dxdy}{\sqrt{۲۵-(x^۲+y^۲)}}$$

$$=\int_{r=۰}^{۳}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\frac{۵\,r\,d\theta dr}{\sqrt{۲۵-r^۲}}=۱۰\pi\int_{r=۰}^{۳}\frac{r\,dr}{\sqrt{۲۵-r^۲}}=-۱۰\pi\sqrt{۲۵-r^۲}\,\Big|_{r=۰}^{۳}=۱۰\pi$$

سوال۵- روش اول : حل مستقیم انتگرال. داریم $x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$ بنابر این

$$\begin{cases}x=(۱-\cos\theta)\cos\theta\\ y=(۱-\cos\theta)\sin\theta\end{cases}\to\begin{cases}dx=-\sin\theta+\sin۲\theta\\ dy=\cos\theta-\cos۲\theta\end{cases}\to\begin{cases}xdy=\cos^۲\theta-\cos\theta\cos۲\theta-\cos^۳\theta+\cos^۲\theta\cos۲\theta\\ -ydx=\sin^۲\theta-\sin\theta\sin۲\theta-\sin^۲\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta\sin۲\theta\end{cases}$$



$$-ydx+xdy=۱-۲\cos\theta+\cos^۲\theta=\frac{۳}{۲}-۲\cos\theta+\frac{۱}{۲}\cos۲\theta$$

$$\oint_C -ydx+xdy=\int_۰^{\pi/۲}(\frac{۳}{۲}-۲\cos\theta+\frac{۱}{۲}\cos۲\theta)d\theta=\frac{۳}{۲}\theta-۲\sin\theta+\frac{۱}{۴}\sin۴\theta\,\Big|_۰^{\pi/۲}=\frac{۳\pi}{۴}-۲$$

روش دوم : استفاده از قضیه گرین. به کمک پاره خط C' که نقطه $(۰,۱)$ را به مبدا مختصات وصل می‌کند یک منحنی ساده و بسته ایجاد می‌کنیم که مرز ناحیه D است. طبق قضیه گرین داریم $\oint_{C\cup C'}-ydx+xdy=\iint_D ۲\,dxdy$ هر انتگرال را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

روی مسیر C' چون $x=۰$ و $dx=۰$ پس $\oint_{C'}-ydx+xdy=۰$ و در نتیجه

$$\oint_{C\cup C'}-ydx+xdy=\oint_C-ydx+xdy+\oint_{C'}-ydx+xdy=\oint_C-ydx+xdy$$

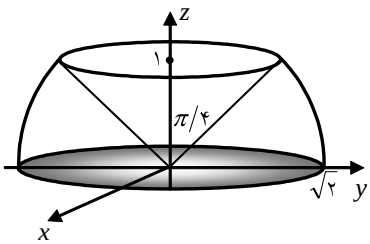
اکنون انتگرال دوگانه را محاسبه می‌کنیم :

$$\iint_D ۲\,dxdy=\int_{\theta=۰}^{\pi/۲}\int_{r=۰}^{۱-\cos\theta}۲r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=۰}^{\pi/۲}(۱-\cos\theta)^۲d\theta=\int_{\theta=۰}^{\pi/۲}(۱-۲\cos\theta+\cos^۲\theta)d\theta$$

این انتگرال را در روش اول محاسبه کرده ایم. بنابر این خواهیم داشت :

$$\oint_C-ydx+xdy=\oint_{C\cup C'}-ydx+xdy=\iint_D ۲\,dxdy=\frac{۳\pi}{۴}-۲$$

سوال۶- این ناحیه را R می‌نامیم و حجم آن را در مختصات کروی محاسبه می‌کنیم . $V=\iiint_R dV=\int_{\rho=۰}^{\sqrt{۲}}\int_{\varphi=\pi/۴}^{\pi/۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\rho^۲\sin\varphi d\theta d\varphi d\rho$



$$V=۲\pi\int_{\rho=۰}^{\sqrt{۲}}\int_{\varphi=\pi/۴}^{\pi/۲}\rho^۲\sin\varphi\,d\varphi d\rho=\sqrt{۲}\pi\int_{\rho=۰}^{\sqrt{۲}}\rho^۲d\rho=\frac{\sqrt{۲}\pi}{۳}(\sqrt{۲})^۳=\frac{۴\pi}{۳}$$

سوال۷- سطح S شامل دو قسمت است. سطح $S_۱=\{(x,y,z)\mid z\ge ۰\,,\ x^۲+y^۲+z^۲=a^۲\}$ که یک نیمکره است و سطح $S_۲=\{(x,y,z)\mid z=۰\,,\ x^۲+y^۲\le a^۲\}$ که یک قرص دایره‌ای است.

بردار گرادیان در هر نقطه از $S_۱$ برابر $(۲x,۲y,۲z)$ و بردار یکه قائم آن برابر است با $\vec{n}=\frac{۱}{a}(x,y,z)$. تصویر این نیمکره بر صفحه $z=۰$ قرص دایره‌ای $x^۲+y^۲\le a^۲$ یعنی $S_۲$ است. همچنین داریم $dxdy=\cos\gamma dS=\frac{z}{a}dS\to dS=\frac{a\,dx\,dy}{z}=\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^۲-(x^۲+y^۲)}}$

$$\iint_{S_۱}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_۱}(x-z,y+z,x-y)\cdot\frac{۱}{a}(x,y,z)\,dS=\frac{۱}{a}\iint_{S_۱}(x^۲+y^۲)\,dS=\frac{۱}{a}\iint_{S_۲}\frac{a(x^۲+y^۲)dx\,dy}{\sqrt{a^۲-(x^۲+y^۲)}}=\int_{r=۰}^{a}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\frac{r^۳}{\sqrt{a^۲-r^۲}}d\theta\,dr$$

$$=۲\pi\int_{r=۰}^{a}(-r\sqrt{a^۲-r^۲}+\frac{a^۲r}{\sqrt{a^۲-r^۲}})dr=۲\pi(\frac{۱}{۳}\sqrt{(a^۲-r^۲)^۳}-a^۲\sqrt{a^۲-r^۲})\,\Big|_۰^a=\frac{۴\pi}{۳}a^۳$$

بردار یکه قائم در هر نقطه از $S_۲$ برابر $\vec{n}=(۰,۰,-۱)$ است. همچنین داریم $dxdy=dS$

z

$$\iint_{S_2} F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_2}(x-z,y+z,x-y)\cdot(0,0,-1)\,dS$$

$$=\iint_{S_2}(-x+y)\,dS=\iint_{s_2}(-x+y)dx\,dy=\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}r^2(-\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\,dr=0$$

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_1\cup S_2}F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_1}F\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{S_2}F\cdot\vec{n}\,dS=\frac{4\pi}{3}a^3+0=\frac{4\pi}{3}a^3$$

طبق قضیه دیورژانس باید داشته باشیم $\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V divF\,dV$. چون $divF=1+1+0=2$ بنابر این

$$\iiint_V divF\,dV=\iiint_V 2\,dV=2\iiint_V dV=2\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho=4\pi\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho=4\pi\int_{\rho=0}^{a}\rho^2\,d\rho=\frac{4\pi}{3}a^3$$

و نتیجه مورد نظر بدست آمده است.

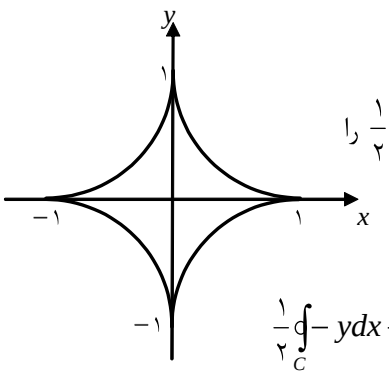
سیدرضا موسوی – ۱۳۸۹/۳/۲۹

دو مساله از ریاضی ۲

مساله اول : مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ را محاسبه کنید.

جواب : اگر C یک مرز ساده و بسته و مرز ناحیه D در صفحه مختصات باشد، مساحت ناحیه D برابر است با $\iint_D dxdy$

اما طبق قضیه گرین می دانیم که : $\iint_D dxdy=\oint_C xdy=\oint_C -ydx=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$



روش اول : اگر C منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ و D ناحیه محدود به آن باشد انتگرال $\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$ را محاسبه می کنیم که مساحت ناحیه D را مشخص می سازد. برای این کار ابتدا منحنی را به صورت $r(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t)$ پارامتری می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi}[-\sin^3 t(-3\sin t\cos^2 t)+\cos^3 t(3\cos t\sin^2 t)]dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_{t=0}^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{8}\int_{t=0}^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{16}\int_{t=0}^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3\pi}{8}$$

روش دوم : انتگرال $\iint_D dxdy$ را مستقیما حل کنیم. به دلیل تقارن شکل، مساحت قسمتی از ناحیه D که در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارد را حساب می کنیم. پس مساحت ناحیه برابر است با $\iint_D dxdy=4\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{(1-x^{2/3})^{3/2}}dy\,dx=4\int_{x=0}^{1}(1-x^{2/3})^{3/2}dx$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $x=\sin^3 t$ استفاده می‌کنیم.

$$\iint_D dxdy=4\int_{x=0}^{1}(1-x^{2/3})^{3/2}dx=4\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^3 t(3\cos t\sin^2 t)dt=12\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$

با حل این انتگرال مساحت ناحیه D بدست می‌آید که در اصل همان انتگرال $\oint_C xdy$ است زیرا :

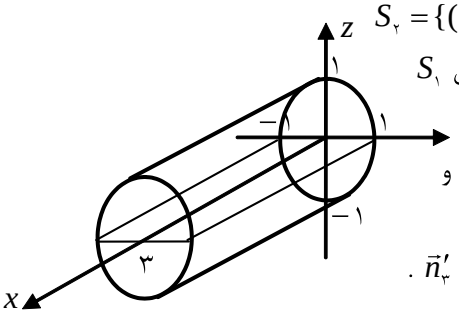
$$\oint_C xdy=\int_{t=0}^{2\pi}\cos^3 t\,d(\sin^3 t)=3\int_{t=0}^{2\pi}\cos^4 t\,\sin^2 t\,dt=12\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$

$$12\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t\,dt=\frac{3}{2}\int_{t=0}^{\pi/2}(1+\cos 2t)^2(1-\cos 2t)\,dt=\frac{3}{2}\int_{t=0}^{\pi/2}(1+\cos 2t-\cos^2 2t-\cos^3 2t)\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_{t=0}^{\pi/2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4t+\cos 2t\sin^2 2t)\,dt=\frac{3\pi}{8}$$

دو مساله از ریاضی ۲

مساله دوم : اگر S سطح خارجی ناحیه $V=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 3\ ,\ y^2+z^2\le 1\}$ باشد،
درستی قضیه دیورژانس (واگرایی) را در مورد میدان برداری $F=(x+z)i+(y+z)j+(x+y)k$ تحقیق کنید.



جواب : سطح S شامل سه سطح $S_1=\{(0,y,z)\mid y^2+z^2\le 1\}$ ، $S_2=\{(3,y,z)\mid y^2+z^2\le 1\}$ و $S_3=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 3, y^2+z^2=1\}$ است. تصویر S_2 روی صفحه $x=0$ قرص دایره ای S_1 و تصویر S_3 روی صفحه $z=0$ ناحیه مستطیلی $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3,-1\le y\le 1\}$ است. سطح S_3 را باید به دو قسمت مجزای $S_3'=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 3, z\ge 0, y^2+z^2=1\}$ و $S_3''=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 3, z\le 0, y^2+z^2=1\}$ تجزیه کنیم.

بردارهای یکه قایم این سطح ها برابرند با $\vec{n}_1=(-1,0,0)$ ، $\vec{n}_2=(1,0,0)$ و $\vec{n}_3'=\vec{n}_3''=(0,y,z)$.

در سطوح S_1 و S_2 داریم $dS=dydz$ و در سطوح S_3' و S_3'' داریم $\sqrt{1-y^2}\,dS=dxdy$.

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_1}(0+z,y+z,0+y)\cdot(-1,0,0)\,dS=\iint_{S_1}-z\,dy\,dz=-\iint_{S_1}z\,dy\,dz$$

$$\iint_{S_2} F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_1}(3+z,y+z,3+y)\cdot(1,0,0)\,dS=\iint_{S_1}(3+z)\,dy\,dz=3\iint_{S_1}dy\,dz+\iint_{S_1}z\,dy\,dz=3\pi+\iint_{S_1}z\,dy\,dz$$

$$\iint_{S_3'} F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_3'}(x+z,y+z,x+y)\cdot(0,y,z)\,dS=\iint_{S_3'}(y^2+z(x+2y))\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=\iint_D(y^2+\sqrt{1-y^2}\,(x+2y))\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\iint_D\frac{y^2dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}+\iint_D(x+2y)dx\,dy$$

$$\iint_{S_3''} F\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_3''}(x+z,y+z,x+y)\cdot(0,y,z)\,dS=\iint_{S_3''}(y^2+z(x+2y))\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=\iint_D(y^2-\sqrt{1-y^2}\,(x+2y))\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\iint_D\frac{y^2dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}-\iint_D(x+2y)dx\,dy$$

مجموع انتگرالهای روی سطح برابر است با :

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS=3\pi+2\iint_D\frac{y^2dx\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=3\pi+2\int_{y=-1}^{1}\int_{x=0}^{3}\frac{y^2dxdy}{\sqrt{1-y^2}}=3\pi+6\int_{y=-1}^{1}\frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=3\pi+3[\arcsin y-y\sqrt{1-y^2}\,]_{-1}^{1}=6\pi$$

طبق قضیه دیورژانس باید داشته باشیم $\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V divF\,dV$. چون $divF=F_x+F_y+F_z=1+1+0=2$ بنابر این

$$\iiint_V divF\,dV=\iiint_V 2\,dV=2\iiint_V dV=2\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x=0}^{3}dx\,dzdy=6\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dzdy=12\int_{y=-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$=6\,[y\sqrt{1-y^2}-\arcsin y]_{-1}^{1}=6\pi$$

و نتیجه مورد نظر بدست آمده است.

سیدرضا موسوی – ۱۳۸۹/۳/۲۹